Statistik
Bachelor-Kurs
Die Wahrscheinlichkeit

K. Molt

Universität Duisburg-Essen, Fak. 4, FG Instrumentelle Analytik

2. Juli 2004

Definitionen

- Ereignisse
  Jede Menge von Ergebnissen oder Ausgängen, die aus einem Experiment/Versuch oder einer Prozedur hervorgehen.
- Einfaches Ereignis, Elementarereignis
  Jeder Ausgang oder jedes Ereignis, das nicht in einfachere Komponenten heruntgebrochen werden kann.
- Ergebnisraum Ω
  Die Menge aller Elementarereignisse eines Zufallsexperiments.

Notation

- $\pi = h/n$
  Relative Häufigkeit bzw. empirische Wahrscheinlichkeit
- p bzw. P
  bezeichnet die Wahrscheinlichkeit
- A, B, ...
  bezeichnen spezifische Ereignisse
- $P(A)$
  $p = P(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Ereignis A ereignet.

Beispiel: Würfel

1 Würfel	
1,2,3, etc.	Einfache Ereignisse
2 Würfel	
6	Kein einfaches Ereignis, da 5 Möglichkeiten: 2-4; 4-2 (einfache Ereignisse) 5-1; 1-5 (einfache Ereignisse) 3-3 (einfaches Ereignis)

Subjektive Wahrscheinlichkeit

Erraten oder Schätzen

Erraten oder Schätzen von Wahrscheinlichkeiten auf Grund von Erfahrung und der Kenntnis von relevanten Begleitumständen.

Wettervorhersage

Die Wettervorhersage wird auf Grund der bestehenden Wetterlage und gewissen empirischen Regeln über die dadurch bedingte Weiterenwicklung der Wettersituation getroffen.

Empirische Wahrscheinlichkeit

Relative Häufigkeit

Beobachte oder führe ein Experiment sehr oft aus (n mal) und zähle wie oft das Ereignis A vorkommt (h_A)! Dann erhält man folgenden Schätzwert für $P(A)$: $P(A) \approx \pi = h_A/n$.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person dieses Jahr vom Blitz getroffen wird?

Daten vom lezten Jahr (USA): 377 Menschen vom Blitz getroffen bei einer Bevölkerung von 274.037.295
$P = 377/274.037.295 \approx 1 : 727.000$

Empirische Wahrscheinlichkeit

Eine Münze wird 100xmal geworfen

Es soll die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl nach oben zeigt bestimmt werden. Durch Simulation mit einen Computer ergibt sich 42x die Zahl und damit eine empirische Wahrscheinlichkeit von $\pi = 42/100 = 0,42$. Das Computerexperiment wurde wie folgt durchgeführt:

```
> Muenze <- rbinom(100,1,0.5)
> Muenze
  [1] 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
      ...
 [71] 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1
      1 0 0 1 1 0 1 0 1
> sum(Muenze)
[1] 42
```

Gesetz der großen Zahl
Jacob Bernoulli (1654-1705)

Wenn ein Zufallsexperiment, bei dem ein bestimmtes Ereignis jedesmal die Auftretenswahrscheinlichkeit p hat, n mal wiederholt wird, dann wird bei großem n dieses Ereignis sehr wahrscheinlich annähernd $p \times n$ mal eintreffen. Oder anders gesagt, die relative Auftretenshäufigkeit wird der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses sehr ähnlich sein.

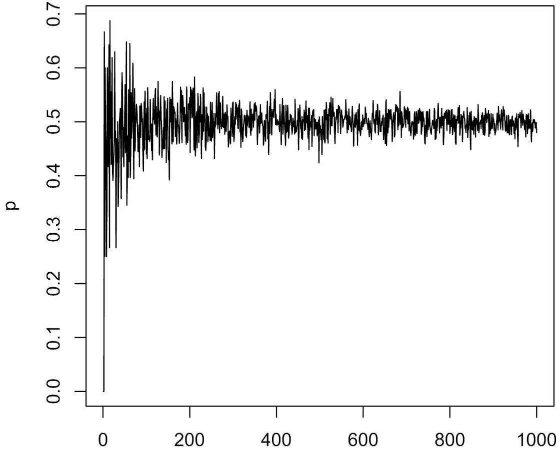
Gesetz der großen Zahl

Münzexperiment

Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators wird das Experiment für eine Anzahl von Würfen zwischen 1 und 1000 simuliert.

```
> x <- seq(1,1000,1)
> for (i in 1:length(x)){
  y <- rbinom(x[i],1,0.5)
  p[i] <- sum(y)/x[i]
  }
> plot(x,p,type="l")
```

Gesetz der großen Zahl



Mit zunehmender Zahl der Würfe nähert sich die empirische Wahrscheinlichkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit.

Gesetz der großen Zahl als Grenzwertgesetz

Das Gesetz der großen Zahl ist ein Grenzwertgesetz, das auch wie folgt formuliert werden kann: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses A um mindestens eine beliebige Zahl ($\epsilon > 0$) von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dieses Ereignisses abweicht, wird verschwindend klein, wenn die Anzahl n der Versuche unendlich groß wird. Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit ist das Resultat eines Wiederholungsvorgangs und nur als Folge von Massenerscheinungen zu verstehen.

Der Mensch - ein schlechter Zufallsgenerator (I)

Schon bei einem einfachen Experiment zeigt sich, dass der Mensch als Zufallsgenerator nicht viel taugt: Werden Versuchsteilnehmer aufgefordert, sich eine Folge von Würfelergebnissen auszudenken - also im Kopf zu würfeln - so unterscheidet sich die Zahlenreihe deutlich von einer real gewürfelten. Es gibt dabei zwei Hauptunterschiede: In realen Würfelfolgen tauchen immer wieder Kombinationen von drei oder gar vier Wiederholungen auf, z. B. viermal hintereinander die Sechs. Diese Wiederholungen sind rein zufälliger Natur. Versuchspersonen vermeiden es jedoch, solche Muster zu produzieren, denn sie empfinden eine derartige Häufung als nicht zufällig.

Der Mensch - ein schlechter Zufallsgenerator (II)

Der zweite Unterschied zwischen realen und ausgedachten Zufallsfolgen ist nicht ganz so auffällig. Menschen neigen dazu, innerhalb kurzer Zeit alle Ziffern gleich häufig zu nennen; sie achten also auf eine Gleichverteilung der Würfelergebnisse. Zwar nähert sich der Anteil einer Zahl auf längere Sicht auch beim realen Würfeln einem Erwartungswert. Es gibt aber keinen Zwang zum Ausgleich. Viele Menschen meinen hingegen unbewusst, dass eine Zahl wahrscheinlicher wird, wenn sie lange nicht gefallen ist. D.h. der Mensch kann (auf Grund der Voreingenommenheit durch sein Gedächtnis) das Verhalten eines Würfels nicht nachahmen. Ein Würfel hat kein Gedächtnis!

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Theoretische oder tatsächliche Wahrscheinlichkeit

Wenn eine Prozedur n unterschiedliche Ereignisse hervorrufen kann, von denen jedes die gleiche Vorkommenschance besitzt, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisse A, wenn A auf n_A unterschiedliche Weisen auftreten kann: $P(A) = n_A/n$

Werfen eines Würfels

Jede Augenzahl ist gleich wahrscheinlich:
$P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 1/6$

Theoretische (tatsächliche) Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Welche Chance besteht, dass von 3 Kindern 2 Jungen sind?
JJJ JJM JMJ MJJ MMM MMJ MJM JMM
8 Möglichkeiten
Jedes Ereignis ist gleich wahrscheinlich: 1/8
3 davon mit 2 Jungen
P = 3/8

Rundungsregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Wenn bei der Division ein Ergebnis ohne Rest erhalten wird, so wird der genaue Bruch (z.B. $\frac{1}{8}$) oder die genaue Dezimalzahl (z.B. 0,125) angegeben.
- Ansonsten wird das Endergebnis auf 3 Stellen hinter dem Komma gerundet.

Grenzen von P

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist gleich Null:
  $P(\varnothing) = 0$
- Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist gleich Eins:
  $P(\varnothing) = 1$

  Würfel:
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Komplementäre Ereignisse

Das zu A komplementäre Ereignis wird mit $\bar{A}$ (lies: „nicht A“ oder „A quer“) bezeichnet und besteht aus allen Ergebnissen bzw. Ausgängen eines Experiments oder einer Prozedur, in denen A nicht vorkommt. Hierbei gilt: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Wie stehen die Chancen für/gegen die Annahme, dass Sie eine Sechs würfeln?

$P(6) = 1/6$, $P(\bar{6}) = 5/6$

Chance dafür: $P(6)/P(\bar{6}) = 1 : 5$

Chance dagegen: $P(\bar{6})/P(6) = 5 : 1$

Roulette

Roulette heißt auf Französisch „kleines Rad“. Das Spiel stammt aus Frankreich und soll auf eine primitive Spielversion zurückgehen, die der französische Wissenschaftler Blaise Pascal um 1657 entwickelt hat. Es entwickelte sich im Laufe der Zeit, bis es Anfang des 19. Jahrhunderts in der Form gespielt wurde, wie wir es heute kennen. Roulette ist das älteste Casinospiel, das immer noch gespielt wird.

Der Kessel

Der Kessel dient im Roulette zur Ermittlung der auszuzahlenden Nummer. Im Roulette-Kessel befinden sich in der Regel 37 Zahlenfächer von der Zero bis zur 36. Die Roulette-Kessel sind Instrumente höchster Präzision und werden in manchen Casinos elektronisch überwacht, so dass Manipulationen ausgeschlossen werden.Der drehbare Innenbereich wird vom Drehcroupier vor dem Abwurf der Roulette-Kugel entgegengesetzt beschleunigt und die Kugel in die andere Richtung abgeworfen.Danach macht sie ca. 9 Umdrehungen, bevor sie sich wegen ihrer abnehmenden Geschwindigkeit den Zahlenfächern nähert. Bevor diese erreicht werden, wird die Kugel meistens noch von einer der im Kessel angebrachten Obstakel abgelenkt, so daß der Kugelfall absolut zufällig erfolgt.

Das Tableau

Das Tableau ist der Bereich auf dem Spieltisch, in dem die Spieler Ihre Einsätze vornehmen können. Es beinhaltet die Setzchancen, die je nach Wahrscheinlichkeit mit niedrigen bzw. hohen Auszahlungsquoten verbunden sind.


PASSE
19-36
PAIR
Even
MANQUE
1-18
IMPAIR
Odd
CASINO-CLUB
George
$3268.00
ANNONCEN
NACHBARZAHLEN
SPIEL OHNE GELD
Hilfe
Optionen
Beenden

Roulette als Zufallszahlengenerator

Das Roulette ist ein einfacher Zufallsgenerator, wie ein Würfel oder die Lottomaschine. Beim Französischen Roulette gibt es 37 Felder, die alle gleich wahrscheinlich sind. Der Spieler hat also die Wahrscheinlichkeit $1/37$, dass seine Zahl fällt.

„Chance“ im Roulette

Als Chancen (oder auch Setzchancen) bezeichnet man die Möglichkeiten, Einsätze auf dem Tableau zu tätigen.Das Roulette bietet beispielsweise eine Vielzahl von Möglichkeiten für das Setzen von Jetons im Roulette-Tableau.

Auszahlungsquote

Jeder Chance, die man auf einem Tableau eines Spieltisches setzen kann, ist eine feste Auszahlungsquote zugeordnet. Man erhält beispielsweise beim Roulette für die Chance „Plein“ im Gewinnfall eine 35-fache Auszahlung (35:1=Nettogewinn : Gewetteten Betrag). Die Höhe der Auszahlungsquoten sind von der Eintrittswahrscheinlichkeit der Chance abhängig.

Einfache Chance

Einfachen Chancen sind Schwarz, Rot, Pair (Gerade), Impair (Ungerade) , Passe (19-36) und Manque (1-18). Die Auszahlungsquote beträgt jeweils das Einfache des Einsatzes

Sperren

Bei Erscheinen von Zero werden die Einsätze auf den „Einfachen Chancen“ gesperrt. Erscheint nach der Zero die gesetzte Chance, werden die Einsätze wieder frei und können zurückgenommen werden. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, nach Erscheinen der Zero die Einsätze mit der Bank zu teilen.

Doppelt sperren

Befinden sich nach dem Fall der Zero auf einer der Sperrlinien der Einfachen Chancen gesperrte Einsätze und fällt zum zweitenmal hintereinander die Zero, werden diese doppelt gesperrt.In diesem Fall schieben die Croupiers Ihre Jetons hinter die Sperrlinie zurück. Der Wert beträgt ein Viertel des ursprünglichen Einsatzes.

Mehrfache Chancen

	0	
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

1./2./3. Dutzend
Auszahlungsquote: 2

Mehrfache Chancen

0		
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

1./2./3. Kolonne
Auszahlungsquote: 2

Mehrfache Chancen

	0	
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

Sechsertransversale
Auszahlungsquote: 5

Mehrfache Chancen

	0	
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

Carré
Auszahlungsquote: 8

Mehrfache Chancen

	0	
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

Dreiertransversale
Auszahlungsquote: 11

Mehrfache Chancen

	0	
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

Cheval (Pl. Chevaux)
Auszahlungsquote: 17

Mehrfache Chancen

	0	
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

Plein
Auszahlungsquote: 35

Die Erwartungswertregel

Von Anfang an waren Wahrscheinlichkeitsüberlegungen mit Überlegungen bezüglich Handlungen verknüpft. Der durchnittliche Ausgang eines Ereignis (z.B. im Hinblick auf Gewinn) lässt sich mit Hilfe der Erwartungswertes berechnen:

$$EW = \sum_{i=1}^{n} (p_i E_i) \tag{1}$$

Die Erwartungswertregel sagt, dass man sich stets für die Option mit dem höchsten Erwartungswert entscheiden sollte

Der Erwartungswert

Setzen von 1 € auf Zahl im Roulette

$$
\begin{aligned}
EW &= \sum_{i=1}^{n}(p_i E_i) \\
EW &= \frac{1}{37} \times (35\text{ €}) + \frac{36}{37} \times (\text{-}1\text{ €}) \\
EW &= \frac{35}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} = \text{-}0{,}027\text{ €}
\end{aligned}
$$

D.h. für jeden gewetteten Euro verliert man im Duchschnitt 3 Cent.